Εισαγωγή στην Τοπολογία, Πτυχιακή εξέταση 31/1/2020

Θέμα 1 (1.5 μον.)
Έστω X ένας διανυσματικός χώρος επί του σώματος των πραγματικών αριθμών. Πότε μία απεικόνηση $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}$ λέγεται νόρμα· Να ορίσετε μετρική που καθορίζει η νόρμα και να αποδείξετε ότι είναι πράγματι μετρική.

Θέμα 2 (2 μον.)
Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Αν A είναι ένα μη κενό υποσύνολο του X να ορίσετε την απόσταση $d(a, A)$ ενός σημείου $a \in X$ από το A και να αποδείξετε ότι ισχύει: $|d(a, A) - d(b, A)| \leq d(a, b)$.

Θέμα 3 (2 μον.)
Έστω $(X, \rho), (Y, d)$ δύο μετρικοί μετρικοί $f\colon X \to Y$ με μια συνάρτηση και $x_0 \in X$. Να αποδείξετε ότι η f συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X με $x_n \xrightarrow{\rho} x$, ισχύει $f(x_n) \xrightarrow{d} f(x)$.

Θέμα 4 (2 μον.)

(i) Πότε ένας μετρικός χώρος (X, d) λέγεται συνεκτικός και πότε ένα υποσύνολο E του X λέγεται συνεκτικό;

(ii) Πότε ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ λέγεται διάστημα; Να αποδείξετε ότι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο δεν είναι διάστημα, δεν είναι συνεκτικό.

Θέμα 5 (2 μον.)
Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος. Να αποδείξετε με **δύο τρόπους** ότι αν K συμπαγές τότε K κλειστό.

(i) Με χρήση της ιδιότητας ότι η συμπάγεια είναι ισοδύναμη με την ακολουθιακή συμπάγεια.

(ii) Με χρήση του ορισμού της συμπάγειας (και χωρίς χρήση ακολουθιών).

Θέμα 6 (1.5 μον.)

(i) Αν A συμπαγές και ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τι συμπεραίνετε για το σύνολο A;

(ii) Να βρείτε ένα υποσύνολο A του $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$ (όπου, ρ_2 η ευκλείδεια μετερική), όπου το A να είναι συνεκτικό, με $\text{diam}(A)$ ίση με τον αριθμό μητρώου σας και με $\text{diam}(A^o)$ (όπου A^o το εσωτερικό του A) να ισούται με 2.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ